數學傳播　50卷2期, pp. 65-69

對「大小地圖上重疊的一點」一文的回響

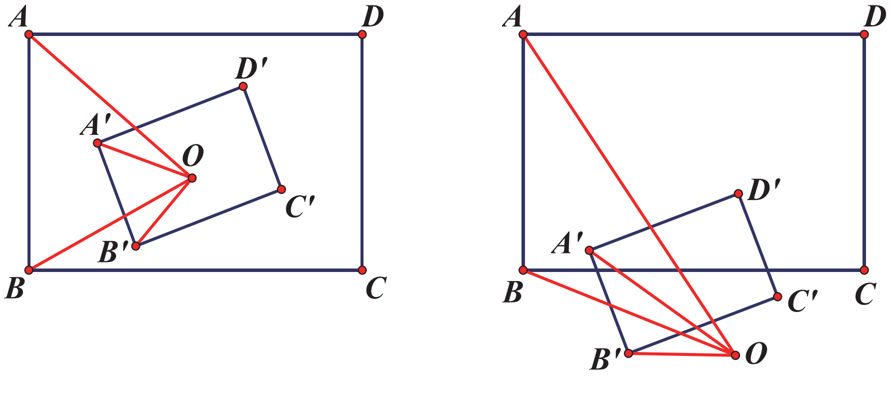
蕭偉智

壹、前言

在數學傳播季刊第 49 卷第 2 期 (194 期) 刊登了一篇許明隆先生所撰「大小地圖上重疊的一點」一文 (以下簡稱「地圖」), 該文探討一個有趣的問題:「把一張地圖, 等比例縮小數倍成一張小的圖。把小圖任意丟在大圖上, 則必可找到重疊的一點, 是地圖上相同的地點」(見 [1])。該文利用四點共圓的幾何性質給出一種作圖方法。不過, 在現行國中數學課綱與多數教科書中, 通常僅介紹圓內接四邊形的角度性質, 而較少直接討論四點共圓的判別方法。

從幾何變換的觀點來看, 此問題的本質可表述爲: 對於平面上兩個互爲相似的圖形, 是否存在一個點, 使得其中一個圖形可以透過旋轉與縮放的組合變換 (即旋位似變換) 映射到另一個圖形? 若存在, 此點是否唯一? 以及如何透過幾何作圖將其求出?

「地圖」一文主要著重於作圖方法, 並未進一步討論該中心點的存在性與唯一性。此外, 原問題是透過「兩張地圖重疊」的情境引入, 但從幾何變換的角度來看, 其實並不需要圖形必須重疊; 即使兩個相似圖形不完全重疊, 仍然可以存在一個旋位似變換中心, 如圖一所示。



圖一: 大小地圖上重疊的一點示意圖

「地圖」一文所提出的問題是旋轉變換以及縮放變換, 但該文僅從「旋轉」的角度去處理作

圖, 當然令人好奇如果從「縮放」的角度去處理作圖該怎麼做? 筆者想將「地圖」一文所提出的問題更完整解決, 從而促成本文。

貳、旋位似變換中心的存在唯一性

直角坐標平面上, 設多邊形 $P_1P_2P_3\cdots P_n$ 和多邊形 $P_1'P_2'P_3'\cdots P_n'$ 互爲相似圖形, 其對應頂點坐標分別爲

$$P_i(\alpha_i,\beta_i) \quad \text{和} \quad P_i'(\alpha_i',\beta_i'),$$

其中 $i=1,2,3,\ldots,n$。

假設兩個多邊形的對應邊之間的旋轉角爲 θ, 對應邊長的縮放比例爲 λ。特別地:

當 $\theta=0^\circ$ 或 180° 時, 變換退化爲純位似變換;

當 $\lambda=1$ 且 $\theta\neq 0$ 時, 就是純的旋轉變換。

我們先將 $P_i(\alpha_i,\beta_i)$ 轉換到以 $O(x,y)$ 爲原點的坐標系, 即考慮向量 (α_i-x,β_i-y), 接著對此向量進行旋轉變換 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, 再進行縮放變換 $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$, 最後再將結果平移回原坐標系。若存在一點 $O(x,y)$ 使得以 O 爲中心進行旋轉角度 θ 並縮放比例 λ 的變換, 可將 P_i 映射至 P_i', 則必須滿足 (1) 。在歐氏幾何中, 將這樣的變換稱爲旋位似變換 (Spiral Similarity), 其中 O 點稱爲旋位似變換中心。

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\alpha_i-x\\ \beta_i-y\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_i'\\ \beta_i'\end{bmatrix}. \tag{1}$$

將 (1) 化簡最後可得 (2)。

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}\lambda\cos\theta & -\lambda\sin\theta\\ \lambda\sin\theta & \lambda\cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\alpha_i-x\\ \beta_i-y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_i'\\ \beta_i'\end{bmatrix}\\
\Rightarrow &\begin{bmatrix}\lambda\cos\theta & -\lambda\sin\theta\\ \lambda\sin\theta & \lambda\cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda\cos\theta & -\lambda\sin\theta\\ \lambda\sin\theta & \lambda\cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_i'\\ \beta_i'\end{bmatrix}\\
\Rightarrow &\begin{bmatrix}\lambda\cos\theta & -\lambda\sin\theta\\ \lambda\sin\theta & \lambda\cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-\lambda\cos\theta & \lambda\sin\theta\\ -\lambda\sin\theta & 1-\lambda\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_i'\\ \beta_i'\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2}$$

因此問題等價於討論下述聯立方程組的解

$$\begin{cases}(1-\lambda\cos\theta)x+(\lambda\sin\theta)y=\alpha_i'-\alpha_i\lambda\cos\theta+\beta_i\lambda\sin\theta\\ (-\lambda\sin\theta)x+(1-\lambda\cos\theta)y=\beta_i'-\alpha_i\lambda\sin\theta-\beta_i\lambda\cos\theta\end{cases}.$$

當 $-\lambda\sin\theta = 0$ (即 $\theta = 0°$ 或 $180°$) 時, 此時變換退化爲位似變換。

當 $-\lambda\sin\theta \neq 0$ 時, 上述兩個一次方程式分別代表平面上的兩條直線。注意到其斜率滿足:

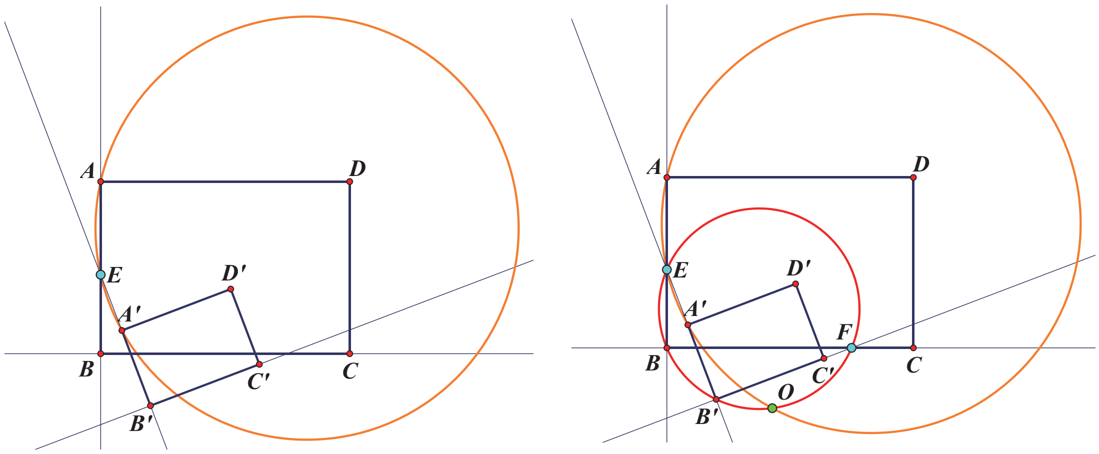
$$\frac{1-\lambda\cos\theta}{-\lambda\sin\theta}\times\frac{\lambda\sin\theta}{1-\lambda\cos\theta} = -1,$$

兩條直線互相垂直, 故此聯立方程式恰有唯一解。因此任意兩個互爲相似的圖形 (非平移情形) 皆存在唯一的旋位似變換中心。

參、變換中心的尺規作圖: 角度與縮放比例

由於第二節已證明任意兩個相似多邊形的旋位似變換中心存在且唯一, 下文仍以「地圖」一文中的四邊形作爲說明例子, 介紹其尺規作圖方法。

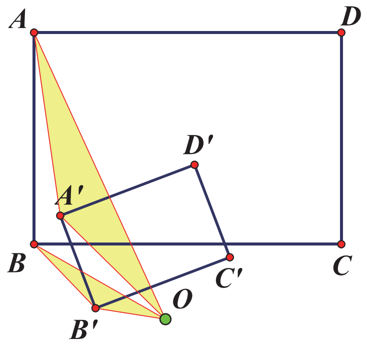
「地圖」一文的尺規作圖方法是以相同旋轉角度 θ 爲觀點, 其作法如下, 令對應邊所在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 交於 E 點, 作 $\triangle AA'E$ 的外接圓, 再用相同的方式, 選擇對應邊所在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 和 $\overleftrightarrow{B'C'}$ 進行作圖, 兩圓交於 O 點, 此點即爲所求, 如圖二所示。



圖二: 利用旋轉角度進行尺規作圖

由圖可知 $\angle BEB' = \angle BFB' = \theta$, 因此 E 點也會 $\triangle BB'F$ 的外接圓上。因爲共圓, 可得 $\angle BFB' = \angle BOB' = \theta$, $\angle AOA' + \angle AEA' = 180°$, 又 $\angle BEB' + \angle AEA' = 180°$, 可得 $\angle AOA' = \angle BEB' = \theta$, 從而有 $\angle AOA' = \angle BOB'$。四點 A、E、A'、O 共圓, 而有 $\angle AA'O = \angle AEO$, 再利用 E、B、B'、O 四點共圓, 可得 $\angle BB'O = \angle AEO$, 所以 $\angle AA'O = \angle BB'O$, 於是得出 $\triangle AA'O$ 相似於 $\triangle BB'O$ (AA 相似), 對應邊的長度即成比例, 如圖三所示。由於旋轉保持角度, 而相似變換保持角度與邊長比例, 多邊形又可透過三角化 (Polygon Triangulation) 處理, 所以「地圖」一文的尺規作圖方法僅處理兩組對應邊 $\overline{AB}$,

$\overline{A'B'}$ 和 $\overline{BC}$, $\overline{B'C'}$ 即可。

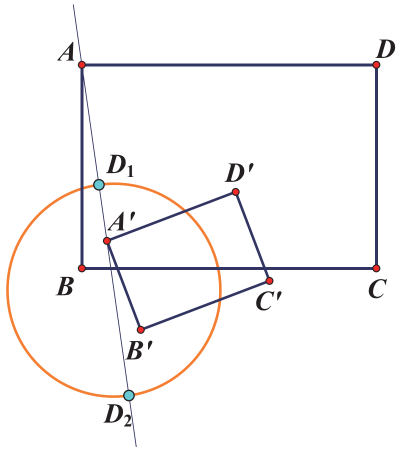


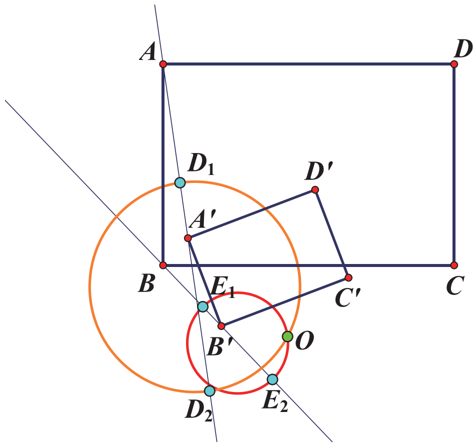
圖三: 相似三角形

於是衍伸出一個自然的思路, 就是僅處理「縮放比例 λ」的尺規作圖方式, 如圖三, 平面上我們該怎麼找出一點 O, 使得 $\overline{OA}:\overline{OA'}=\overline{OB}:\overline{OB'}$, 其比值爲 λ? 顯然這是廣爲人知的阿波羅尼奧斯圓定理 (Apollonian circles), 即「平面上動點 P 滿足與兩個定點的距離之比爲定值 (此定值不爲 1), 此時 P 點其軌跡是一個圓」, 有關此定理的幾何或代數證明, 讀者可自行查詢參閱網路或書籍資料。

本文接下來提出阿波羅尼奧斯圓定理的作圖方法, 其作法如下。

設對應邊的長度比 $\overline{AB}:\overline{A'B'}=1:\lambda$。連接直線 $\overleftrightarrow{AA'}$, 利用平行線截比例線段性質, 在該直線上分別作內分點 D_1 與外分點 D_2, 使得 $\overline{D_1A}:\overline{D_1A'}=\overline{D_2A}:\overline{D_2A'}=1:\lambda$, 再以 $\overline{D_1D_2}$ 爲直徑作圓 (即爲阿波羅尼奧斯圓), 再用相同的方式, 以 B 和 B' 點爲定點, 分別作內分點 E_1 與外分點 E_2, 使得 $\overline{E_1B}:\overline{E_1B'}=\overline{E_2B}:\overline{E_2B'}=1:\lambda$, 再以 $\overline{E_1E_2}$ 爲直徑作圓。上述兩個阿波羅尼奧斯圓通常會相交於兩點, 如圖四所示。





圖四: 利用縮放比例進行尺規作圖

這兩個交點在幾何上分別對應於兩種不同的相似變換。然而, 本文在第二節透過代數證明, 對於一組特定的旋位似變換, 其變換中心是唯一存在的。這兩個交點在幾何意義上分別代表了兩種不同的相似映射: 第一種, 正向相似 (Direct Similarity): 即本文討論的「旋位似變換」, 此變換維持了多邊形的定向 (Orientation), 對應於 (1) 中行列式值爲正的旋轉矩陣解; 第二種, 反向相似 (Opposite Similarity): 此變換除了旋轉與縮放之外, 還包含鏡射, 因此會改變圖形的定向。因此, 在尺規作圖得到兩個交點之後, 需依據原圖形與目標圖形的頂點排列方向 (順時針或逆時針) 來選取正確的中心點。中心點 O 必須使得 $\triangle OAB$ 與 $\triangle OA'B'$ 的頂點排列順序一致, 即兩個有向角 $\angle AOB$ 和 $\angle A'OB'$ 須相等。如圖四所示, O 點爲所求的旋位似變換中心。

肆、結語

本文針對許明隆先生所撰「地圖」一文中提出的問題進行探討, 該文作者是以角度觀點切入。本文則從比例觀點出發, 利用阿波羅尼奧斯圓提供另一種尺規作圖方法。兩種方法皆能得到相同的旋位似變換中心, 提供了理解此問題的不同幾何視角。

參考文獻

1. 許明隆。大小地圖上重疊的一點。數學傳播季刊, 49(2), 80-82, 2025。

—本文作者蕭偉智投稿時任教於新北市立文山國民中學—